Lattes

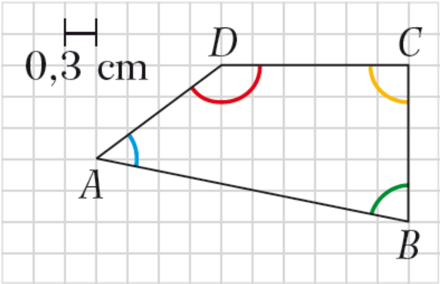
Similitudine

Figure simili e rapporto di similitudine

Due figure aventi la stessa forma ma non necessariamente le stesse dimensioni sono dette **simili**.

La trasformazione di una figura **F** nella sua immagine **F'** è una trasformazione **non isometrica** che prende il nome di **similitudine**.

- Se analizziamo l'ampiezza degli angoli delle due figure notiamo che gli angoli corrispondenti sono congruenti.
- *A*, *A'*; *B*, *B'*; *C*, *C'*; *D*, *D'* sono coppie di **punti corrispondenti**.
- *AB* e *A'B'*; *BC* e *B'C'*; *CD* e *C'D'*; *DA* e *D'A'* sono coppie di **segmenti corrispondenti.**
- *A*, *A'*; *B*, *B'*; *C*, *C'*; *D*, *D'* sono coppie di **angoli corrispondenti.**



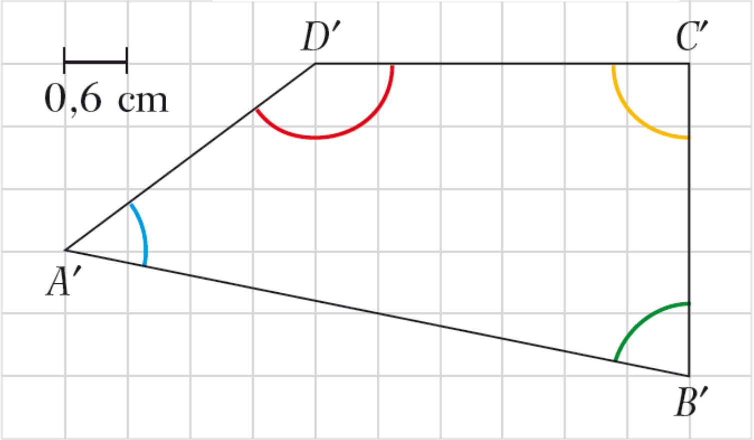


Figure simili e rapporto di similitudine

Due poligoni sono simili se hanno gli angoli corrispondenti congruenti e il rapporto fra due lati corrispondenti costante.

L'ampiezza degli angoli e il rapporto fra lati corrispondenti sono **invarianti** per la similitudine.

Il rapporto fra due lati corrispondenti prende il nome di **rapporto di similitudine** e si indica con ***k***:

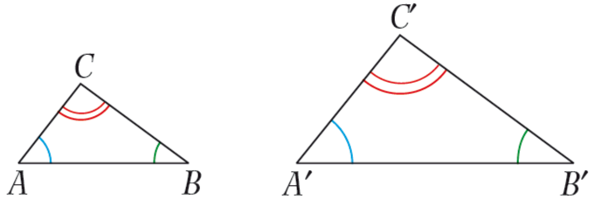
- se $k > 1$ **F'** è un ingrandimento di **F**;
- se $k = 1$ **F'** ed F sono congruenti;
- se $k < 1$ **F'** è una riduzione di **F**.

Criteri di similitudine dei triangoli

PRIMO CRITERIO DI SIMILITUDINE

Due triangoli sono simili se hanno gli angoli ordinatamente congruenti.

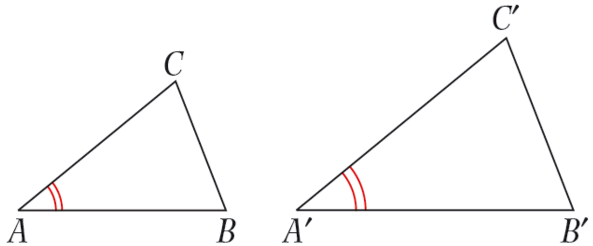
$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad \hat{B} = \hat{B}' \qquad \hat{C} = \hat{C}'$$



SECONDO CRITERIO DI SIMILITUDINE

Due triangoli sono simili se hanno un angolo dell'uno congruente a un angolo dell'altro e i lati che formano tali angoli in proporzione.

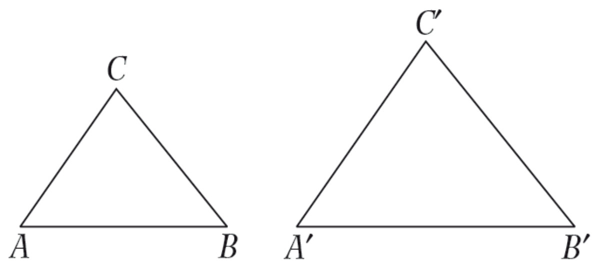
$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad \overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'C'} : \overline{AC}$$



TERZO CRITERIO DI SIMILITUDINE

Due triangoli sono simili se hanno i lati corrispondenti in proporzione.

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{A'C'} : \overline{AC}$$



Lattes

Caratteristiche dei poligoni simili

RELAZIONE TRA I PERIMETRI

Il rapporto fra i **perimetri di due poligoni simili** è uguale al loro rapporto di similitudine cioè al rapporto tra le lunghezze di due lati corrispondenti:

$$\frac{2p'}{2p} = k$$

RELAZIONE TRA LE AREE

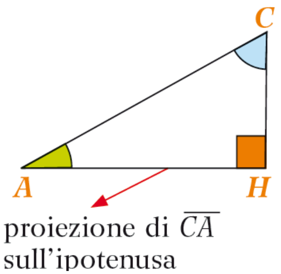
Le **aree di due poligoni simili** sono proporzionali al quadrato del rapporto di similitudine cioè al rapporto fra i quadrati delle lunghezze di due lati corrispondenti:

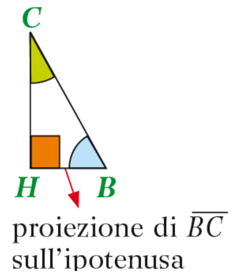
$$\frac{A'}{A} = k^2$$

Teoremi di Euclide

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.





Consideriamo i triangoli ABC e AHC:

ABC è simile ad AHC perché sono entrambi rettangoli, l'angolo A è in comune e quindi anche l'angolo B è uguale all'angolo C. Si può scrivere la proporzione:

$$HA : CA = AC : AB \qquad \text{da cui} \qquad AH : CA = CA : AB$$

Il cateto CA è medio proporzionale tra l'ipotenusa AB e la proiezione AH del cateto AC sull'ipotenusa.

Consideriamo i triangoli ABC e CBH:

ABC è simile a CBH perché sono entrambi rettangoli, l'angolo B è in comune e quindi anche l'angolo A è uguale all'angolo C. Si può scrivere la proporzione:

$$BH : BC = CB : AB \qquad \text{da cui} \qquad HB : BC = BC : AB$$

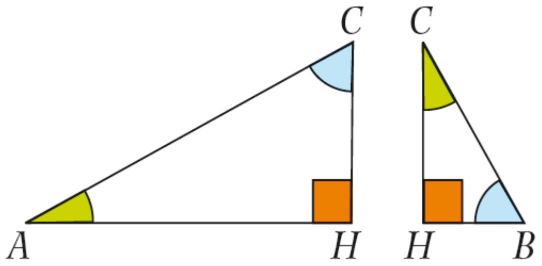
Il cateto BC è medio proporzionale tra l'ipotenusa AB e la proiezione HB del cateto BC sull'ipotenusa.

Lattes

Teoremi di Euclide

SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.



Consideriamo di nuovo il triangolo *ABC* diviso in due triangoli ***AHC*** e ***HBC*** dall'altezza relativa all'ipotenusa *CH*.

I triangoli *AHC* e *HBC* essendo simili al triangolo *ABC* sono simili fra loro, vale quindi la proporzione:

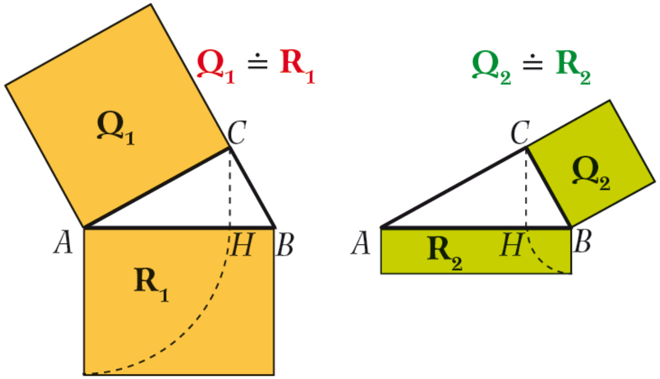
$$AH : CH = CH : HB$$

Teoremi di Euclide

UN'ALTRA VERSIONE DEI TEOREMI DI EUCLIDE

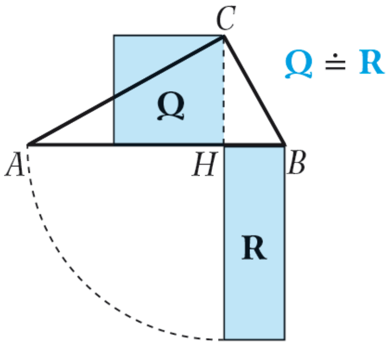
Primo teorema di Euclide

Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



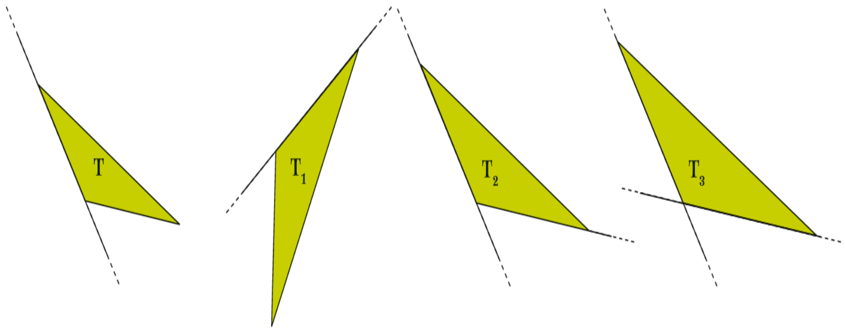
Secondo teorema di Euclide

Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.



Similitudine e omotetia

FIGURE OMOTETICHE



Osservando le figure si nota che **T** e **T_1** sono simili così come sono simili **T_2** e **T_3**,
ma la coppia **T_2** e **T_3** ha una caratteristica in più rispetto alla coppia **T** e **T_1**.
Infatti **T_3**, figura immagine, è disposta come **T_2**, figura origine: i **lati corrispondenti** hanno la stessa direzione cioè **sono paralleli**.

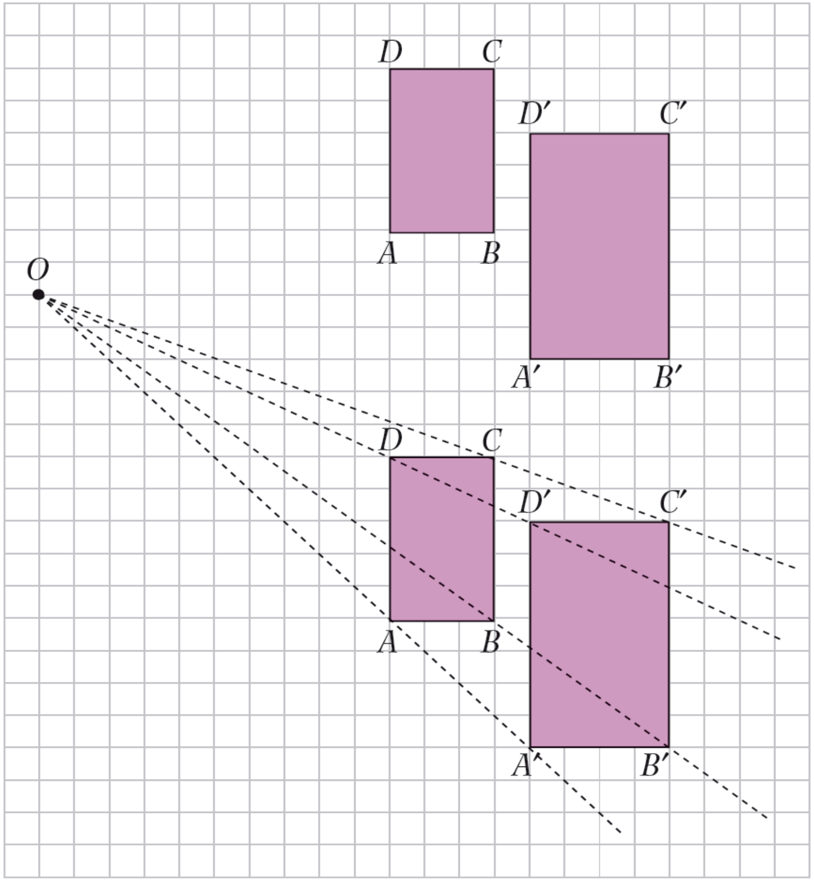
Nel linguaggio matematico si dice che **T_2** e **T_3** sono **figure omotetiche**.
La trasformazione che lega le due figure è detta **omotetia** (omotetia deriva dal greco e significa *uguale disposizione*).

Similitudine e omotetia

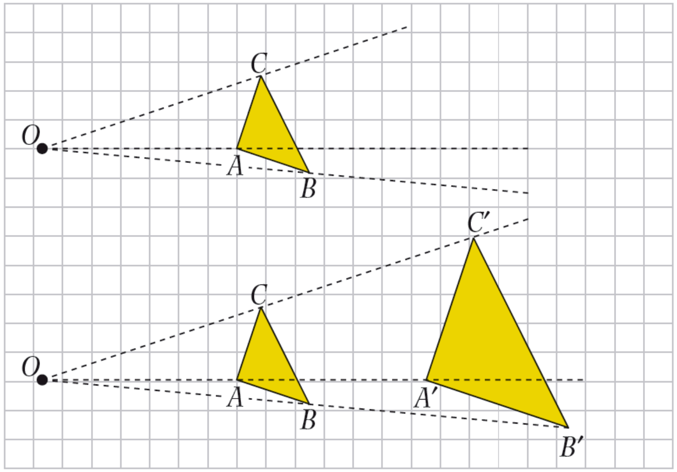
FIGURE OMOTETICHE

Se **F** ed **F’** sono due figure omotetiche allora:

- **F** e **F’** sono simili;
- **F** e **F’** hanno i lati corrispondenti paralleli;
- le rette che passano per punti corrispondenti delle due figure si incontrano in un punto *O* detto **centro di omotetia**.



Similitudine e omotetia



COSTRUZIONE DI FIGURE OMOTETICHE

Dato il triangolo *ABC*, costruiamo il triangolo omotetico *A′B′C′* in modo che il rapporto di similitudine sia 2.
Per fare ciò fissiamo a piacere un punto *O* nel piano e tracciamo le semirette *OA*, *OB*, *OC*.
Segniamo su tali semirette i punti *A′*, *B′* e C′ in modo che:

$$OA' = 2 \times OA \qquad OB' = 2 \times OB \qquad OC' = 2 \times OC$$

Congiungiamo i punti *A′, B′ e C′* con segmenti e otteniamo il triangolo *A′B′C′* omotetico di *ABC* rispetto al centro *O*. In questo caso la figura è stata ingrandita.

Il rapporto $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$ è detto **rapporto di omotetia**, coincide con il rapporto di similitudine e si indica con ***k***.

Per costruire due figure omotetiche **F** e **F′** occorre conoscere il **centro di omotetia** e il **rapporto di omotetia *k***:

- se $k > 1$ — **F′** è un ingrandimento di **F**;
- se $k = 1$ — **F′** ed **F** sono congruenti;
- se $k < 1$ — **F′** è una riduzione di **F**.

Similitudine e omotetia

Un'omotetia può essere diretta o inversa.

- **Diretta** quando la figura e la sua immagine sono dalla stessa parte rispetto a *O*.
- **Inversa** quando la figura e la sua immagine sono da parti opposte rispetto al centro *O*.